

Pauta Control 1

P1. Sean p, q, r, s proposiciones. Pruebe, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una tautología

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee (q \wedge s)]$$

Solución: Primera forma: Por inspección

El único caso de interés es asumir que $[\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] \Leftrightarrow F$ y concluir que $[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})]$ es también "Falso".

En efecto, si $[\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] \Leftrightarrow F$, entonces $\bar{p} \Leftrightarrow F$, $\bar{r} \Leftrightarrow F$ y $(q \wedge s) \Leftrightarrow F$. (1.0 puntos)

Entonces $p \Leftrightarrow V$, $r \Leftrightarrow V$ y q, s tienen valores distintos.

Así, el primer miembro queda $(V \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})$ equivalente a $(V \Rightarrow q) \wedge (V \Rightarrow s)$ y como q y s tienen valores distintos, uno de los factores anteriores es falso y por lo tanto $[(V \Rightarrow q) \wedge (V \Rightarrow s)] \Leftrightarrow F$. (1.0 puntos)

Sigue que $[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Leftrightarrow F$

Segunda forma: Álgebra Lógica

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \overline{[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})]} \vee (\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)) && \text{Def. } \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{p \vee q \vee \bar{s} \vee \bar{r}} \vee \bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s) && \text{Morgan} \\ &\Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{s} \wedge r) \vee \bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s) && \text{Morgan (1.0 puntos)} \\ &\Leftrightarrow [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] \vee [(\bar{s} \wedge r) \vee \bar{r}] \vee (q \wedge s) && \text{Asociatividad} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{[(\bar{p} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})]}_V \vee \underbrace{[(\bar{s} \vee \bar{r}) \wedge (r \vee \bar{r})]}_V \vee (q \wedge s) \\ &\Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{s} \vee \bar{r}) \vee (q \wedge s) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\bar{q} \wedge s) \vee (q \wedge s)}_V \vee (\bar{s} \vee \bar{r}) && \text{Asociatividad} \\ &\Leftrightarrow V \vee (\bar{s} \vee \bar{r}) \\ &\Leftrightarrow V && (1.0 puntos) \end{aligned}$$

P2. Demuestre que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) \forall A, B \in P(U)$

Solución: En efecto, sea

$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \quad (\text{Def}).$$

$$\begin{aligned} (0.5 \text{ puntos}) \quad &\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B && (\text{Propiedad}) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) && (\text{Definición}) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B) && (\text{Definición}) \end{aligned}$$

(0.5 puntos)

Sigue que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

P3. Sea U el conjunto universo. Considere dos conjuntos fijos $A, B \subseteq U$, con $A \neq \phi$
 Para cualquier conjunto $X \subseteq U$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \phi \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \phi \end{cases}$$

- (a) Pruebe que $C(B) \in \{\phi, B\}$.
- (b) Pruebe que $C(A) = A \setminus B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$.
- (c) Pruebe que si $(X \cap Y) \cap A \neq \phi \Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.

Solución:

- (a) Para $B \subseteq U$,
 si $A \cap B \neq \phi \Rightarrow C(B) = B \setminus B = \phi$
 si $A \cap B = \phi \Rightarrow C(B) = B \cup B = B$.

Sigue que $C(B) \in \{\phi, B\}$ (1.0 puntos)

- (b) Para calcular $C(A)$, $X = A$ y $A \cap A = A \neq \phi$ por hipótesis.
 Entonces corresponde $C(A) = A \setminus B$ (0.3 puntos)

Para calcular $C(A^c)$, $X = A^c \Rightarrow A \cap X = A \cap A^c = \phi$
 Entonces corresponde $C(A^c) = A^c \cup B$ (0.3 puntos)

Y de lo anterior $(C(A))^c = (A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$
 Sigue que $C(A^c) = (C(A))^c$ (0.4 puntos)

- (c) Como por hipótesis $(X \cap Y) \cap A \neq \phi$ entonces $X \cap A \neq \phi$ y $Y \cap A \neq \phi$.
 Así, corresponde $C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B = X \cap Y \cap B^c$ (0.4 puntos)

También $C(x) = X \setminus B = X \cap B^c \wedge C(Y) = Y \setminus B = Y \cap B^c$ (0.3 puntos)

Sigue que $C(X) \cap C(Y) = (X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c) = X \cap Y \cap B^c$.
 Se concluye que $C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$ (0.3 puntos)